1. Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Обозначим через $L \subset \mathbb{C}$ решетку $\{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$. Определим $\wp$-функцию Вейерштрасса $\wp(z, L)$ при помощи суммы ряда

$$\wp(z, L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

1) Где находятся нули производной функции Вейерштрасса?

2) Предположим, что решетка L переходит в себя при повороте на $\pi/2$ относительно начала координат. Каким (дополнительным) уравнениям удовлетворяют в этом случае функция Вейерштрасса $\wp(z, L)$ и ее производная? Найдите общие решения этих уравнений в классе мероморфных функций на комплексной плоскости.

3. Для $z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4$ и $w \in \mathbb{C}$ рассмотрим кубическое уравнение

$$z_3 w^3 + z_2 w^2 + z_1 w + z_0 = 0. \tag{1}$$

Разрешая данное уравнение относительно w, мы получаем многозначную аналитическую функцию четырех комплексных переменных $w = w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ (под аналитичностью функции многих переменных мы будем здесь понимать ее аналитичность по каждому из переменных в отдельности, если значения всех остальных переменных фиксированы произвольным образом). Обозначим через $\boldsymbol{w}$ росток решения $w = w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ уравнения (1) в окрестности точки $z^{(0)} \in \mathbb{C}^4$, в которой дискриминант этого уравнения отличен от нуля.

1) Вычислите размерность $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}, z^{(0)})$ линейного пространства, порожденного всеми ростками функции $w(z)$ (в обозначениях 5-й задачи из 4-го листка).

2) Используя результат 5-й задачи из 3-го листка, предложите систему линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным z_0, z_1, z_2, z_3 с целыми коэффициентами, чье пространство голоморфных решений в окрестности точки общего положения содержит все ростки функции $w(z)$ в этой точке и имеет размерность $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}, z^{(0)})$.

3) Выберите базис в пространстве голоморфных решений и разложите его элементы в ряды Пюизо с центром в начале координат.

4. Определим *тэта-функцию* $\theta(z, \tau)$ при помощи равенства

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)$$

для $z \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Im} \tau > 0$. Используя результаты 7-й задачи из 4-го листка и 6-й задачи из 6-го листка, покажите, что при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место соотношение

$$2\,\pi^{-s/2}\,\zeta(s)\,\Gamma(s/2) = \int_0^\infty (\theta(0, ix) - 1)\, x^{s/2}\, \frac{dx}{x},$$

где $\zeta(s)$ – ζ-функция Римана.